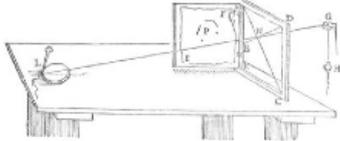





Computer-Graphik I

Projektionen & Perspektive

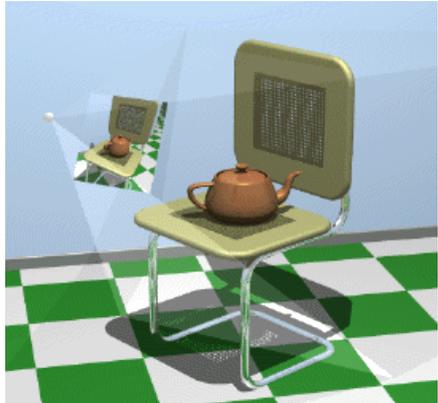



G. Zachmann
 Clausthal University, Germany
zach@tu-clausthal.de



Motivation

- Man möchte die virtuelle 3D Welt auf einem 2D Display darstellen
- Dito in der Malerei (reale Welt → Leinwand)



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 2

Perspektive in der Geschichte der Malerei

- Erste Ansätze:

Giotto: Jesus vor Kaiphas (1305)

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 3

Brunelleschi's "Peep show" in Florenz, ca. 1410-1420

The Baptistry, San Giovanni, Florence

Duomo and Piazza del Duomo, Firenze

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 4

Es dauerte eine Weile bis das Know-How europaweit bekannt war ...



Reconstruction of the temple of Jerusalem. From William of Tyre: *Histoire d'Outremer*. France, Rouen, XVe siècle. Artiste: Maître de l'Échevinage

Ca. 1460-1470

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12

Projektion und Perspektive 5

Schachbrettmuster wurden sehr beliebt

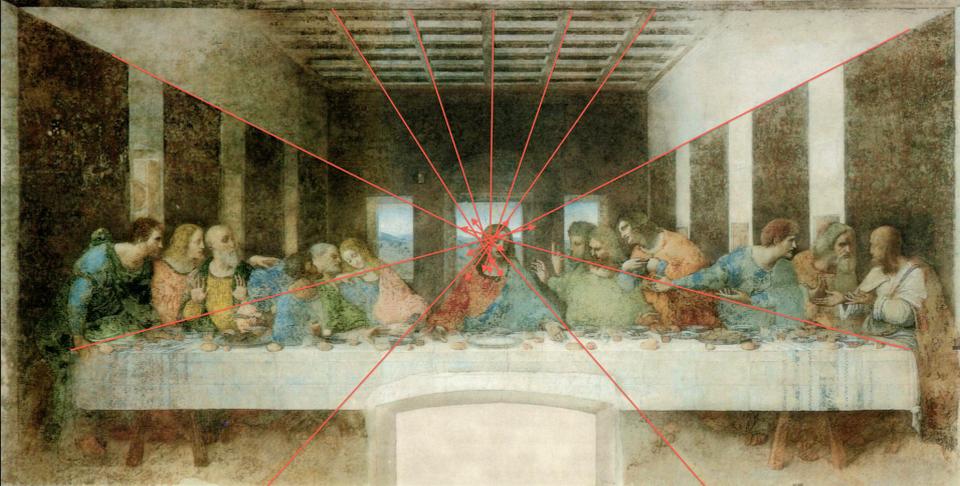


Christ Handing the Keys to St. Peter
Pietro Perugino (1481-82), Fresco, Sixtinische Kapelle, Vatikan

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12

Projektion und Perspektive 6

Der gezielte Einsatz der Perspektive: da Vinci's Abendmahl



1494 – 1498

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 7

This slide illustrates the use of perspective in Leonardo da Vinci's 'The Last Supper'. The painting is shown with a network of red lines that converge at a central vanishing point, demonstrating the architectural and spatial construction of the scene. The text above the image reads 'Der gezielte Einsatz der Perspektive: da Vinci's Abendmahl' and the date '1494 – 1498' is centered below the image. The footer contains the author 'G. Zachmann', the course 'Computer-Graphik 1 – WS 11/12', and the page number 'Projektion und Perspektive 7'.

Erste perspektivische "Rätsel"



Die Gesandten
Hans Holbein
der Jüngere
(1533)

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 8

This slide discusses the 'Anamorphic' or 'anamorphic' perspective used in Hans Holbein the Younger's 'The Ambassadors'. The painting depicts two men standing behind a table with various objects. The floor is a complex geometric pattern that appears to be a distorted or 'warped' perspective, creating a visual puzzle. The text above the image reads 'Erste perspektivische "Rätsel"' and the title 'Die Gesandten Hans Holbein der Jüngere (1533)' is located to the right of the image. The footer contains the author 'G. Zachmann', the course 'Computer-Graphik 1 – WS 11/12', and the page number 'Projektion und Perspektive 8'.

Eine Satire über Perspektive

"Satire on False Perspective" by William Hogarth, 1753

Bildunterschrift:
Whoever makes a DESIGN without the Knowledge of PERSPECTIVE will be liable to such Absurdities as are shewn in this Frontispiece.

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 9

Projektionen in der Pipeline

Modeling Transformations

Illumination (Shading)

Viewing Transformation (Perspective / Orthographic)

Clipping

Projection (to Screen Space)

Scan Conversion (Rasterization)

Visibility / Display

Eye Space / Camera Space

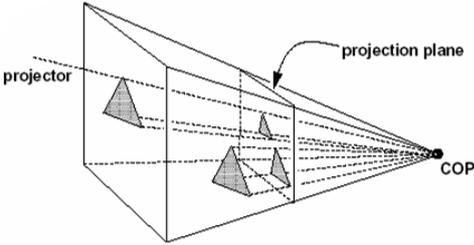
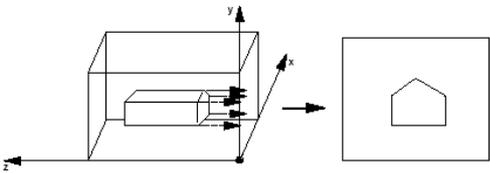
Clip Space (NDC)

Screen Space

Oft fassen wir unter dem Begriff "Projektion" alle 3 Transformationen zusammen!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 10

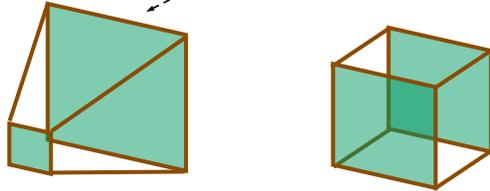
Orthographische vs. Perspektivische Projektion

- Perspektivisch** = alle Projektionsstrahlen laufen im Projektionszentrum (COP) zusammen
 
- Orthographisch** = parallele Projektionsstrahlen
 - Kann man als Spezialfall der perspektivischen Projektion betrachten

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 12

Terminologie

- Der Bereich des 3D-Raumes, der auf den Bildschirm projiziert wird, heißt **View Volume**, oder **Viewing Volume**
- Bei perspektivischer Projektion heißt er auch **View Frustum**

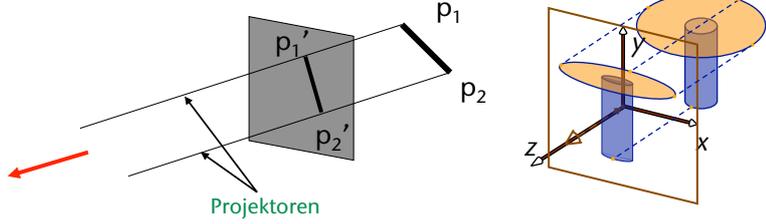


- Lat. "frustum" = (abgebrochener) Brocken

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 13

Orthographische Projektion

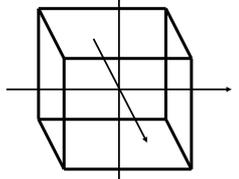
- Punkte werden orthogonal auf die Projektionsebene (*viewing plane*) projiziert
 - Projektionslinien verlaufen senkrecht zur Projektionsebene
- Eigenschaften:
 - Parallele Linien bleiben parallel
 - Winkelverhältnisse bleiben erhalten, aufgrund der parallelen Verschiebung zu Projektionsebene
- Es gibt noch andere (schiefe) Parallel-Projektionen



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 14

Die Projektionsmatrix

- Annahme: die komplette "virtuelle Welt" befindet sich im (kanonischen) Viewing-Volume $(-1, 1, -1, 1, -1, 1)$
- Die x- und y-Komponente bleiben unverändert
- Projektionsmatrix setzt z-Komponente auf 0

$$P_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 15

Perspektivische Projektion

- Wird am häufigsten verwendet in der Computergraphik & Malerei
- Unser Auge führt eine Zentralperspektive durch ("Lochkamera")
- Punkte werden entlang einer Gerade zum **Zentrum der Projektion** (COP; z.B. Mittelpunkt der Augenlinse) auf die **Bild-Ebene** (*viewing plane*) projiziert

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 17

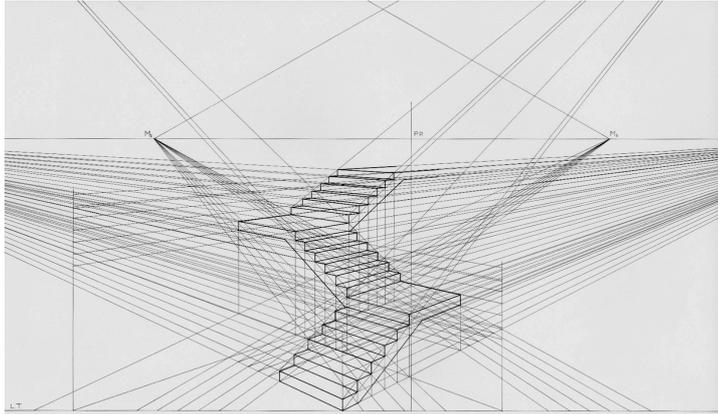
Eigenschaften

- Entfernte Objekte sind kleiner (**perspektivische Verzerrung**)
- Parallele Linien werden **nicht auf parallele** Linien abgebildet, sondern laufen scheinbar in einem gemeinsamen Punkt zusammen
- Solch ein Punkt heißt **Fluchtpunkt**

Quelle: Deutsche Fotothek

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 18

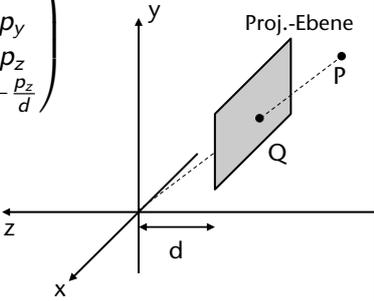
- Alle Bündel von parallelen Linien, die horizontal sind, haben einen Fluchtpunkt, der auf der Horizontlinie im Bild liegt
- Zu jeder Ebene im 3D gehört eine solche "Fluchtpunktlinie" im Bild



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 19

Die Projektionsmatrix

- Ann.: Kamera im Ursprung, schaut in Richtung negative z-Achse
- Projektion auf eine Ebene $z = -d$, $d > 0$

$$q = \begin{pmatrix} -p_x \frac{d}{p_z} \\ -p_y \frac{d}{p_z} \\ -d \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -p_x \frac{d}{p_z} \\ -p_y \frac{d}{p_z} \\ -d \\ 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ -\frac{p_z}{d} \end{pmatrix}$$


$$Q = M \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 20

- Mit anschließender Projektion auf Ebene $z = 0$

$$P_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}$$

- Beachte:
 - Wenn $d \rightarrow \infty$, dann entspricht P_P der orthographischen Projektion
 - Wenn $d \rightarrow 0$, dann wird

$$Q = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ -\frac{p_z}{d} \end{pmatrix}$$

instabil

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 21

Perspektivische Projektion in 2 Schritten

- Wie bei orthographischer Projektion kann man, wegen Clipping, die perspektivische Projektion in 2 Schritten machen:
 1. Perspektivische Abbildung (nicht Projektion!)
 2. Projektion

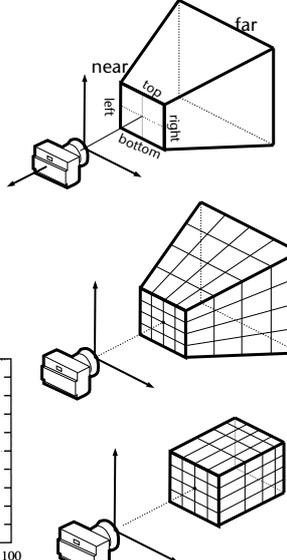
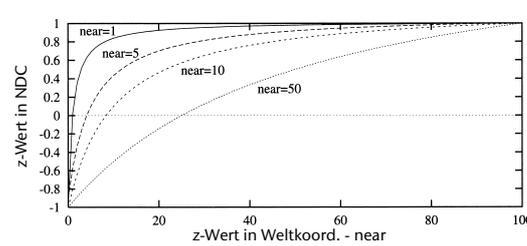
The diagram shows three stages of perspective projection. In the first stage, a 3D object is projected onto a 'Back plane' (a green rectangle) in a perspective view. In the second stage, the resulting 2D image on the back plane is projected onto a 'Front plane' (a green rectangle) to produce the final perspective projection. The coordinate system (x, y, z) is shown in both stages. Arrows labeled '1.' and '2.' indicate the sequence of steps.

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 22

Die Matrix für Schritt 1 (o.Bew.):

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Achtung: der z-Wert in NDC hängt **nicht linear** vom z-Wert in Weltkoordinaten ab!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 23

Eigenschaften von projektiven Transformationen

- Die allgemeine Matrix:

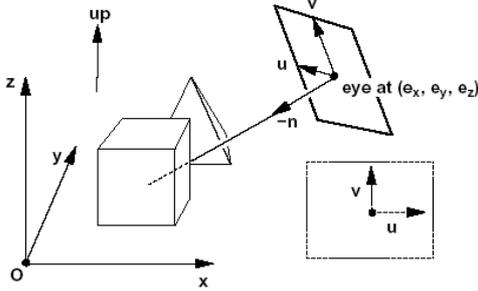
$$B = \begin{pmatrix} A & b \\ q^T & w \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad b, q \in \mathbb{R}^3, \quad w \in \mathbb{R}$$
 - Entspricht für $y = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^3$ der Abbildung

$$\psi: x \mapsto \frac{Ax + b}{q^T x + w}$$
- B und λB beschreiben dieselbe Abbildung ($\lambda \neq 0$)
- Bildet Linien auf Linien ab
- Erhält i. A. **weder** Parallelität **noch** Teilungsverhältnisse
- Erhält aber Doppelverhältnisse!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 25

Transformation von World Space \rightarrow Eye Space

- Heißt **Viewing Transformation** oder **Camera Transformation**
- Parameter zum Positionieren der Kamera:
 - **Augpunkt** $E = (e_x, e_y, e_z)$
 - **"Up"-Vektor** in Weltkoordinaten: dieser Vektor soll senkrecht auf dem Bildschirm erscheinen, also parallel zu v
 - Punkt C in Weltkoordinaten, der in der Mitte des Bildes erscheinen soll (heißt auch **Look-At**)
- Aufgabe: daraus das **Kamerakoordinatensystem u, v, n** berechnen (**eye space**)

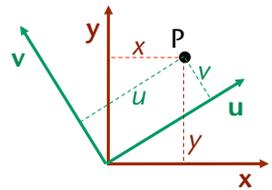


G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 26

- Transformation von Weltkoord. in Kamerakoord. = Translation + Wechsel der Orthonormalbasis
 - Gegeben: Koord.achsen x, y, z & u, v, n und der Punkt $P = (x, y, z)$
 - Bestimme P in u, v, n -Koord., also $P' = (u, v, n)$
- Wechsel der Orthonormalbasis:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

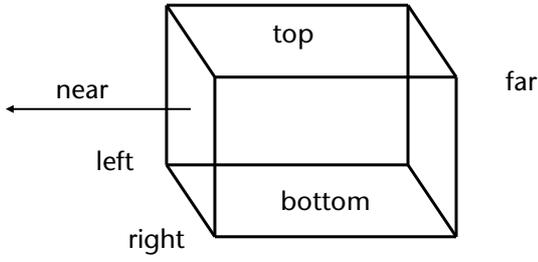
mit $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ etc.



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 28

Projektion in OpenGL

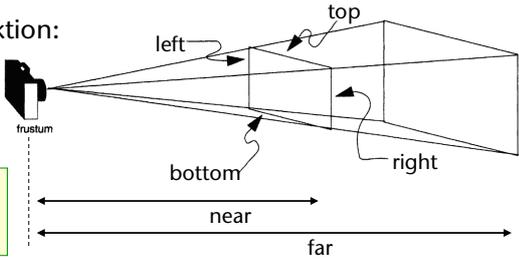
- Orthographische Projektion



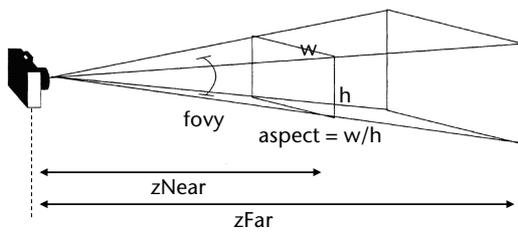
```
glOrtho(left, right, bottom, top, near, far);
```

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 29

Perspektivische Projektion:



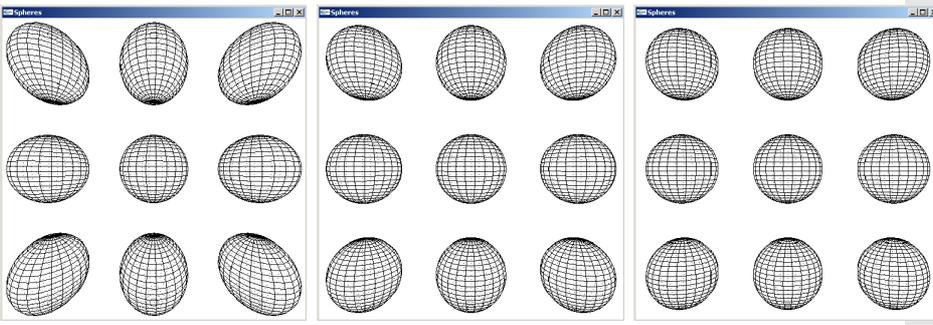
```
glFrustum( left, right,
           bottom, top,
           near, far );
```



```
gluPerspective( fovy,
                aspect,
                zNear,
                zFar );
```

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 30

■ Vorsicht bei Perspektive: Öffnungswinkel nicht zu groß wählen!

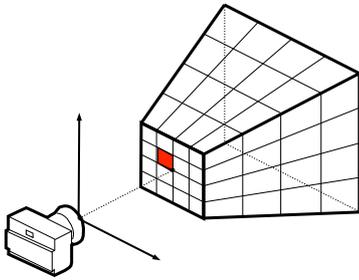


90° 60° 45°

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 31

Asymmetrisches Frustum

- Kommt manchmal vor, z.B.
 - Stereo-Projektion
 - Rendern eines Posters mit 10000 x 10000 Pixel (Framebuffer zu klein)
 - Mit `gluPerspective()` nicht möglich
- Poster: Zerlegen in viele Teilbilder mit voller Auflösung

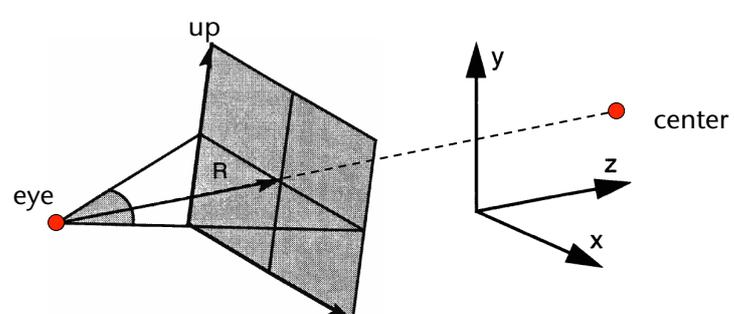


```
glFrustum( left, right,
           bottom, top,
           near, far );
```

Hier ist `left` \neq `right`, `top` \neq `bottom`!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 32

Festlegen des Viewpoints mittels GL Utility



```
gluLookAt( eyeX, eyeY, eyeZ, centerX, centerY,
           centerZ, upX, upY, upZ );
```

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 33

Die Projektionsmatrix in OpenGL

- Projektionen werden *auch* durch Matrizen realisiert
- Achtung: für diese existiert eine eigene "globale" Matrix!
- Alle Transformations-Operationen (**glTranslate**, ..., **glFrustum**, ...) multiplizieren immer mit der aktuell "eingeschalteten" Matrix!!
- Umschalten mittels


```
glMatrixMode( { GL_MODELVIEW, GL_PROJECTION } );
```

 - Nach dem Umschalten beziehen sich alle Matrixbefehle auf die entsprechende Matrix
 - Zurückschalten auf **GL_MODELVIEW** nicht vergessen!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 34

- Sollte man die Transformation von Welt- in Kamerakoord. in die MODELVIEW-Matrix oder in die PROJECTION-Matrix multiplizieren?
- Antwort: allg. üblich ist es, sie in die MODELVIEW-Matrix zu stecken, aber es geht genauso die PROJECTION-Matrix
 - In manchen Fällen, z.B. in einer Cave, **muß** man es sogar in der PROJECTION-Matrix machen
- Gesamtansicht aller Matrizen:

$$p' = \underbrace{M_{\text{proj}}}_{\text{GL_PROJECTION}} \cdot \underbrace{V \cdot T \cdot \dots \cdot S \cdot R}_{\text{GL_MODELVIEW}} \cdot p$$


Zum Schluss: Transformation ins Kamerakoordinatensystem z.B. mit gluLookAt als erstes Kommando
 Beliebige Transformationen

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12
Projektion und Perspektive 35

OpenGL-Beispiel

- Ein typisches OpenGL-Programm sieht dann ungefähr so aus:

```

glColor3f( 0.0, 0.0, 0.0 );
glClear( GL_COLOR_BUFFER_BIT | GL_DEPTH_BUFFER_BIT );
glMatrixMode( GL_PROJECTION ); // set up projection
glLoadIdentity();

glOrtho( -1.0,1.0, -1.0,1.0, 1.0,10.0 );
oder
glFrustum( -1.0,1.0, -1.0,1.0, 1.0,10.0 );

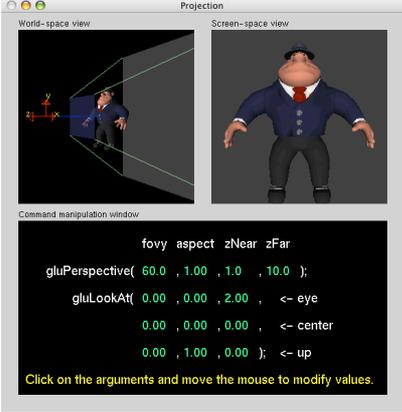
glMatrixMode( GL_MODELVIEW ); // set up camera trf
glLoadIdentity();
gluLookAt( 0,0,1, 0,0,0, 0,1,0 );

glTranslatef( 0,0,tz ); // set up model-view
glRotatef( alpha, 1.0, 0.0, 0.0 );

render geometry ...
  
```

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12
Projektion und Perspektive 36

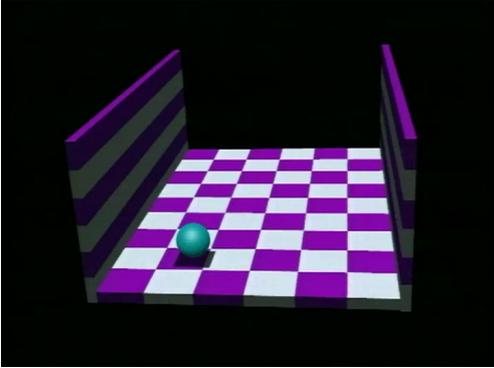
Demo



<http://www.xmission.com/~nate/tutors.html>

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 37

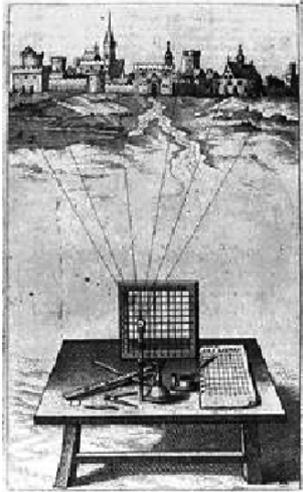
- Dieses Verfahren wird häufig in Spielen angewandt
- Manchmal wird der Schatten auf dem Boden noch viel schlimmer "gefaket" (einfach graue Ellipse auf dem Boden als Geometrie rendern)
- Das hat sogar eine gewisse Berechtigung, wie folgende optische Illusion zeigt
- (Übrigens ist der Pfad der Kugel im Bild beides Mal genau derselbe → weitere Illusion!)



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 51

■ Noch einige Beispiele aus der Kunst

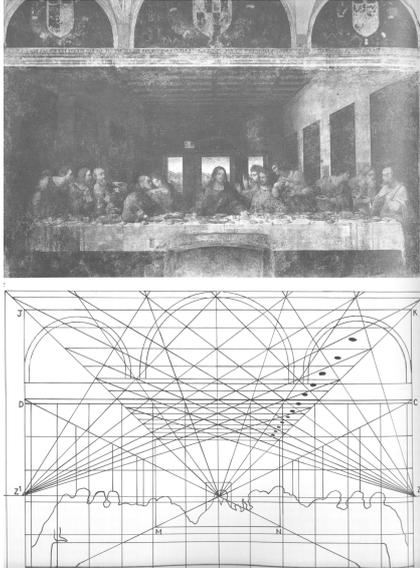
- Theoretisch wurde die Lösung des Problems der Perspektive von Leon Battista Alberti in seinem Buch *Della Pittura*, 1435-1436, beschrieben
- Brunelleschi löste es als erster praktisch 1410-1420



Alberti's *reticolato*

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 52

- Leonardo da Vinci sagte:
There are some who look at the things produced by nature through glass, or other surfaces, or transparent veils. They trace outlines on the surface of the transparent medium... But such an invention is to be condemned in those who do not know how to portray things without it, how to reason about nature with their minds... They are always poor and mean in every invention and in the composition of narratives, which is the final aim of this science



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 53

Erste Multi-Perspektive



Raffael: *Die Schule von Athen*

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 54

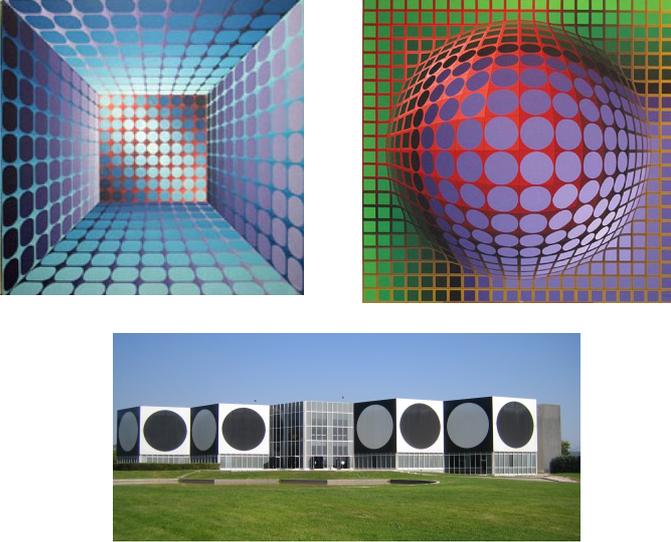
Multi-Perspektive, um den mystischen Eindruck zu erhöhen



De Chirico:

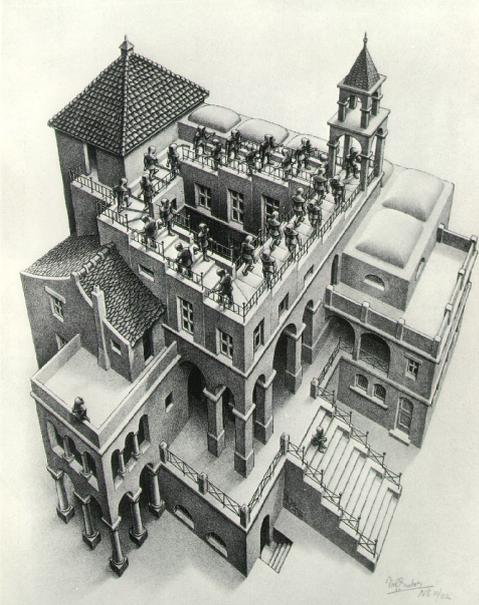
G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 55

Viktor Vasarely: Perspektive in der abstrakten Kunst



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 56

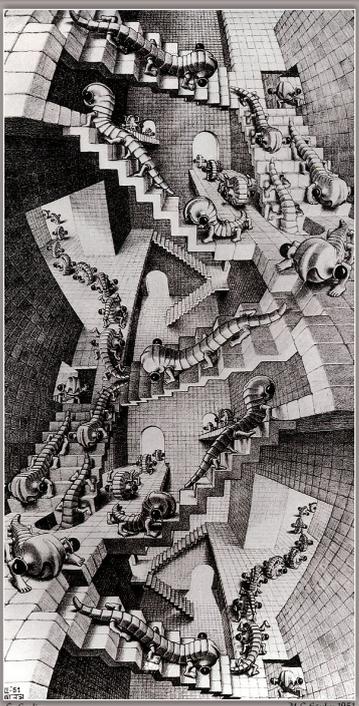
Einsatz der (korrekten) Perspektive zur Irritation des Betrachters



Maurits Cornelis
ESCHER:
*Ascending and
Descending*
1960, Lithograph

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Projektion und Perspektive 57

Nicht-lineare Perspektive



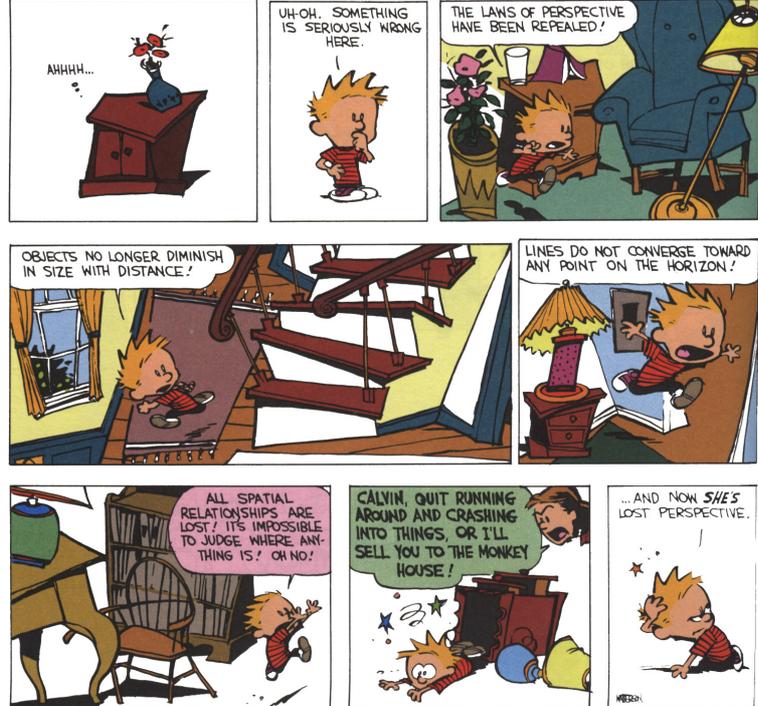
M. C. Escher

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12

58

calvin and hobbes

by WATTERSON



AHHH...

U-OH. SOMETHING IS SERIOUSLY WRONG HERE.

THE LAWS OF PERSPECTIVE HAVE BEEN REPEALED!

OBJECTS NO LONGER DIMINISH IN SIZE WITH DISTANCE!

LINES DO NOT CONVERGE TOWARD ANY POINT ON THE HORIZON!

ALL SPATIAL RELATIONSHIPS ARE LOST! IT'S IMPOSSIBLE TO JUDGE WHERE ANYTHING IS! OH NO!

CALVIN, QUIT RUNNING AROUND AND CRASHING INTO THINGS, OR I'LL SELL YOU TO THE MONKEY HOUSE!

...AND NOW SHE'S LOST PERSPECTIVE.